Ecrire les raisons de la correction d'algorithmes : perspectives depuis la Chine ancienne

Karine Chemla

Karine Chemla

"Ecrire les raisons de la correction d'algorithmes : perspectives depuis la Chine ancienne"

In Ahmad Hasnawi, Pierre Pellegrin et Roshdi Rashed (éds.), *La démonstration de l'antiquité à l'âge classique,* Paris: Blanchard, 2013, à paraître, Version 27-09-2011.

ECRIRE LES RAISONS DE LA CORRECTION D'ALGORITHMES : PERSPECTIVES DEPUIS LA CHINE ANCIENNE

Karine CHEMLA (CNRS, UMR 7219 SPHERE, Paris)

L'historiographie de la démonstration mathématique s'est beaucoup moins attardée sur l'histoire de la démonstration d'algorithmes *stricto sensu* qu'elle ne s'est penchée sur des démonstrations visant à établir la vérité de propositions comme celles qu'illustrent les théorèmes des *Eléments* d'Euclide. C'est à la première de ces deux opérations que j'ai consacré beaucoup d'efforts dans les dernières années dans la mesure où les documents chinois sur lesquels je menais mes recherches exigeaient de comprendre ce que démontrer la correction d'un algorithme signifiait. A l'inverse, ces sources fournissaient un matériau de choix pour nourrir cette réflexion. Je voudrais revenir ici sur trois points à mes yeux essentiels de ce type de démonstration afin de les approfondir. Dans un premier temps, je proposerai quelques remarques sur la nature spécifique des textes qui énoncent des algorithmes[1]. Si nous devons, en effet, prendre en compte les propriétés des textes par lesquels ces procédures sont formulées dans nos sources, c'est dans la mesure où ces propriétés se reflètent dans certains traits des démonstrations que nous aurons à considérer. Dans un second temps, je poursuivrai mon enquête sur ces énoncés d'algorithmes pour signaler un phénomène que nos sources manifestent régulièrement : certaines formulations d'algorithmes pointent vers les raisons de leur correction. En d'autres termes, les textes des algorithmes indiquent parfois les points clefs d'une démonstration. J'ai identifié deux modalités de ce phénomène, dont j'esquisserai la description dans la seconde partie de cet article. On les trouve toutes deux assez largement représentées dans les sources anciennes. Jens Høyrup a voici plus de vingt ans montré leur massive présence dans les sources mésopotamiennes tandis que, sur la base d'une méthode toute différente, je suggérais que certains textes d'algorithmes contenus dans les documents mathématiques chinois anciens relevaient d'une analyse comparable[2]. La question se pose dès lors de comprendre pourquoi ce phénomène n'affecte pas tous les textes d'algorithmes. Je proposerai des éléments de réponse dans ma troisième partie, suggérant que ce sont des raisons fondamentales liées à la démonstration de la correction d'algorithmes qui sont ici à l'œuvre. Elles nous mettront sur la piste d'une autre opération clef par laquelle on a pu, en Chine ancienne, démontrer la correction d'algorithmes sur la base d'autres algorithmes.

Le document principal sur la base duquel je traiterai ces questions est complexe, et c'est le processus historique au cours duquel il fut constitué qui en fait toute la richesse. Il se compose en

[1] Je précise qu'ici l'expression de « texte d'algorithme » ne renvoie pas à un développement duquel un lecteur —un historien par exemple— est à même d'extraire une méthode de calcul, mais à strictement parler, un texte qui vise à énoncer une procédure.

[2] Après plusieurs articles qui touchaient à cet aspect, [Høyrup, 1990] donne un premier exposé systématique de ce que je relis ici en des termes peut-être légèrement différents des siens, j'y reviens. [Høyrup, 2002] constitue l'exposé le plus complet sur ces questions. [Chemla, 1990, Chemla, 1991] sont les premiers articles que j'ai consacrés à ce phénomène intrigant, auquel je suis régulièrement revenue sous des points de vue différents. Je préciserai les questions de méthode ci-dessous.

effet de plusieurs strates qui se sont accumulées les unes aux autres au fil du temps pour ne plus former qu'un tout. *Les Neuf Chapitres sur les procédures mathématiques* (九章算術), dont je date l'achèvement du I^{er} siècle après notre ère, en représentent la couche la plus ancienne[3]. Un érudit du IIIe siècle dont nous savons peu de choses, Liu Hui, en acheva, en 263, un commentaire. Il représente le lecteur le plus ancien dont nous pouvons observer l'interprétation des *Neuf Chapitres*, et c'est l'un des titres auxquels son exégèse revêt un intérêt historique particulier. Enfin, en 656, Li Chunfeng présenta au trône un supracommentaire de l'ensemble des *Neuf Chapitres* et du commentaire de Liu Hui qui avait été rédigé sous sa direction. Ces annotations furent formulées dans le cadre de la composition d'un commentaire à une anthologie, les *Dix Classiques de mathématiques*, au nombre desquels figuraient *Les Neuf Chapitres*. L'ensemble de cet ouvrage, du commentaire de Liu Hui et du supracommentaire dirigé par Li Chunfeng paraissent avoir acquis une cohésion propre au fil des siècles et avoir de ce fait joui, au moins à partir du XIe siècle, d'une existence indépendante de l'anthologie[4]. J'y puiserai essentiellement le matériau sur la base duquel je développerai mes analyses, tout en introduisant ici ou là, pour les besoins d'un argument, des références à d'autres sources. La raison pour laquelle ce document est particulièrement précieux pour traiter des questions soulevées en ouverture de cet article est double : outre le fait que nous pouvons observer des lecteurs anciens dans leur travail d'interprétation des *Neuf Chapitres*, il se trouve que leurs commentaires abordent systématiquement la question de la correction des algorithmes du classique. J'emploierai dans ce qui suit ces deux types de témoignages de façon conjointe.

La nature du texte d'un algorithme dans les sources de la Chine ancienne

Les propriétés des textes d'algorithmes que nous illustrerons à l'aide des *Neuf Chapitres* sont plus largement attestées dans des documents produits en Chine entre le début du second siècle avant notre ère au plus tard et le septième siècle[5].

---

[3] J'ai exposé mes raisons pour cette datation dans l'introduction que j'ai rédigée au chapitre 6 de [Chemla and Guo Shuchun, 2004, 477—478]. *Les Neuf Chapitres* —c'est ainsi que j'abrège le titre de ce livre— sont eux-mêmes sans doute l'aboutissement d'un processus historique complexe. Les documents mis au jour par l'archéologie aujourd'hui permettront sans doute de s'attaquer à cette question sous peu. Insistons sur le fait qu'à la différence de ces documents, *Les Neuf Chapitres* doivent d'avoir survécu au fait d'avoir été transmis par la tradition écrite. Le statut de « classique » qui leur a été conféré assez tôt (voir ci-dessous) a sans doute joué là un rôle important. Je prendrai ici *Les Neuf Chapitres* comme le tout qui a pris forme aux environs des débuts de l'ère commune. Les discussions sur le processus historique au terme duquel l'ouvrage vit le jour ainsi que sur la date à laquelle il convient d'en situer l'achèvement restent vives. Les datations proposées s'étendent de 100 avant notre ère à 100 après notre ère. Voir [Bai Shangshu 白尚恕, 1982, ii, Guo Shuchun郭書春, 1992, 9—24, Lam Lay Yong, 1994, 6, Li Jimin李繼閔, 1990, 2—19, Shen Kangshen, et al., 1999, 1]. On trouvera un panorama plus complet dans [Volkov, 2010, 286].

[4] Les sources sur lesquelles cette affirmation reposent sont présentées dans [Chemla, 2010a]. Dans ce qui suit, je traduis le texte du Classique *Les Neuf Chapitres* en lettres capitales et les commentaires en minuscules, en en précisant l'auteur. A des fins de simplicité, je renverrai par l'expression de « commentaire de Li Chunfeng » au supracommentaire rédigé sous la direction de ce dernier.

[5] [Chemla, 2009a, Chemla, à paraître] illustrent ce fait en utilisant des algorithmes prélevés dans des ouvrages allant du *Livre de procédures mathématiques*, découvert en 1984 dans une tombe scellée en *ca* 186 avant notre ère [PENG Hao彭浩, 2001], au commentaire de Li Chunfeng.

Au sein des *Neuf Chapitres*, les textes d'algorithmes sont placés le plus souvent après un ou plusieurs problèmes, mais il leur arrive, comme nous le verrons ci-dessous, d'être placés avant l'énoncé de quelque problème que ce soit. La relation entre problèmes et algorithmes est moins simple qu'il n'y paraît. En premier lieu, Liu Hui nous fournit le témoignage de ce que l'attente d'un lecteur des *Neuf Chapitres* ne se limitait pas au fait qu'un algorithme résolve le problème auquel il faisait suite : ce lecteur escomptait qu'un algorithme permette de traiter une classe de problèmes semblables au problème inséré dans le texte [Chemla and Guo Shuchun, 2004, 11—15]. Mais ce n'est le seul trait qui rende la relation entre ces deux entités complexe, comme nous le verrons par la suite.

Notre premier exemple (problème 11 du chapitre 5, que je noterai 5.11) illustre le cas où le texte de l'algorithme est placé après un unique problème et est conforme aux attentes usuelles en matière de formulation de procédure. Voici une traduction de l'ensemble :

« SUPPOSONS QU'ON AIT UNE PYRAMIDE TRONQUEE A BASE CIRCULAIRE[6] DONT LA CIRCONFERENCE DU CERCLE INFERIEUR VAUT 3 *ZHANG*, LA CIRCONFERENCE DU CERCLE SUPERIEUR 2 *ZHANG* ET LA HAUTEUR 1 *ZHANG*. ON DEMANDE COMBIEN VAUT LE VOLUME.

REPONSE : 527 *CHI* 7/9 *CHI*.

PROCEDURE : LES CIRCONFERENCES DES CERCLES SUPERIEUR ET INFERIEUR ETANT MULTIPLIEES L'UNE PAR L'AUTRE, PUIS CHACUNE MULTIPLIEE PAR ELLE-MEME, ON SOMME CEUX-CI (LES RESULTATS) ; ON MULTIPLIE CECI PAR LA HAUTEUR ET ON DIVISE PAR 36.

今有圓亭，下周三丈，上周二丈，高一丈。問積幾何。

荅曰：五百二十七尺九分尺之七。

術曰：上下周相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三十六而一。»

On constate que les opérations sont prescrites de façon directe, par des termes les désignant usuellement (« multiplier l'un par l'autre » *xiangcheng,* une prescription de la multiplication énoncée à la suite des deux opérandes sur lesquels porte l'opération ; « multiplier par soi-même » *zicheng*, prescription également placée après le terme désignant l'opérande ; « sommer » *bing*, qui est appliquée à ce à quoi renvoie *zhi* « ceux-ci », etc.). Par ailleurs, l'emploi du texte répond à l'idée la plus commune que nous nous en faisons spontanément : on considère et on exécute les opérations dans l'ordre dans lequel les termes se présentent depuis le début jusqu'à la fin du texte. Nous verrons qu'il est de fait loin d'en être toujours ainsi. Le texte de la procédure peut donc se représenter, avec des notations simples[7], comme suit :

$$\begin{matrix} C_i \\ C_s \end{matrix} \longrightarrow C_i C_s + C_i^2 + C_s^2 \longrightarrow (C_i C_s + C_i^2 + C_s^2)h \longrightarrow (C_i C_s + C_i^2 + C_s^2)h/36$$

Cette représentation met en valeur une autre propriété du texte, qui vaut pour l'énoncé d'un algorithme en général : ce texte s'appréhende de façon spécifique dans le temps. Si cette propriété est courante pour de tels énoncés, la manière dont elle est satisfaite dépend des textes considérés. Notre second exemple mettra immédiatement ce fait en évidence. Cet autre texte, qui est, pour sa part, placé à la suite de l'énoncé de deux problèmes (énoncés 17 et 18 du chapitre 1), renvoie à un algorithme permettant de diviser, l'une par l'autre, des quantités comportant des entiers possiblement suivis d'une ou plusieurs fractions. Chacun des deux problèmes illustre des cas

[6] Je choisis de traduire ainsi le nom du cône tronqué afin de donner à voir la structure de la terminologie qui, en chinois classique, allie la pyramide tronquée et le cône tronqué (voir chapitre D, in [Chemla and Guo Shuchun, 2004]).

[7] C_i et C_s désignent respectivement les circonférences inférieure et supérieure, h est la hauteur.

différents. Je propose au lecteur de ne pas tenter pour l'instant de comprendre la traduction littérale du texte de l'algorithme que voici[8] :

« PARTAGER DIRECTEMENT
PROCEDURE : [1] ON PREND LA QUANTITE (*SHU*) DE PERSONNES COMME DIVISEUR, [2] LA QUANTITE (*SHU*) DE SAPEQUES COMME DIVIDENDE. [3] ON EFFECTUE LA DIVISION DU DIVIDENDE PAR LE DIVISEUR. [4] S'IL Y A UN TYPE DE PARTS, ON LES FAIT COMMUNIQUER. [5] S'IL Y A PLUSIEURS TYPES DE PARTS, ON LES EGALISE PUIS ON FAIT COMMUNIQUER.
經分
術曰：以人數爲法，錢數爲實，實如法而一。有分者通之。重有分者同而通之。»

On constate, dans ce texte, qu'à côté de la prescription d'opérations par des termes ordinaires du type « diviser » [1], on rencontre des vocables comme « faire communiquer » [4, 5], « égaliser » [5], que j'ai traduit à dessein de façon littérale. Nous reviendrons sur ces mots. Ils renvoient à des blocs d'opérations dont la teneur dépend du cas auquel l'algorithme est appliqué. Car, par contraste avec l'algorithme précédent, le texte intègre ici le traitement de plusieurs cas[9]. Examinons les modalités de cette intégration. Le cas fondamental, celui auquel les autres sont ramenés, est celui de la division de deux entiers l'un par l'autre. Il se traite par la suite d'étapes [1], [2], [3]. On remarque que ces trois clauses ne sont précédées d'aucune précision par contraste avec les clauses suivantes, toutes deux introduites par une condition.

La clause [4] s'applique au cas où il n'apparaît qu'"un type de fractions", à savoir, en termes modernes, aux deux sous-cas suivants : soit les deux quantités traitées sont du type $(a + \frac{b}{c})$ et d, soit elles sont du type $(a + \frac{b}{c})$ et $(d + \frac{e}{c})$. L'opération « faire communiquer » que prescrit la clause [4], appliquées à ces opérandes, transforme $(a + \frac{b}{c})$ en $ac + b$ tandis que, selon les sous-cas, d ou $(d + \frac{e}{c})$ deviennent cd ou $cd+ e$, respectivement. Pour ce second cas, l'algorithme se conclut en prenant l'une des quantités comme dividende, l'autre comme diviseur, et en divisant. Il s'achève donc par les étapes auxquelles renvoient les clauses [1], [2] et [3][10].

[8] L'énoncé de la procédure est formulé par référence au sujet des deux problèmes. Ce trait, courant dans le classique, n'entame pas la généralité du propos, comme on peut le montrer en observant Liu Hui lire. NB : j'insère des chiffres entre crochets pour faciliter la discussion de cet extrait. Ils n'appartiennent pas au texte original. J'ai argumenté une interprétation de ce texte dans [Chemla, 1992] et je ne reviens pas ici sur les raisons qui m'amènent à le lire comme je le fais. Je m'appuierai sur cette interprétation pour dire quelques mots du texte de l'algorithme, puis, dans la seconde partie, de la manière dont Liu Hui le traite et le commente.

[9] Pour être rigoureux, il faudrait préciser la nature exacte de ce contraste. Je n'entre pas ici dans les détails.

[10] Il est difficile à ce stade de savoir si [1] et [2], qui correspondent sans doute à un placement des quantités sur la surface sur laquelle les calculs s'opéraient à l'aide de baguettes, s'exécutent avant ou après [4]. Ce point n'étant pas essentiel ici, je le laisse de côté pour le traiter systématiquement dans une publication future. Nous avons donc, pour ce cas, soit la suite d'opérations [4], [1], [2], [3], soit [1], [2], [4], [3]. Lorsque je mentionnerai ci-dessous l'ordre [4], [1], [2], [3], je demande au lecteur de suppléer l'ordre alternatif [1], [2], [4], [3], que j'omettrai pour des raisons de simplicité. L'important pour moi ici est l'interversion, dans l'exécution, de [3] et [4]. Les mêmes remarques s'appliquent dans le troisième cas que considère le texte.

La clause [5], pour sa part, s'applique au cas où les quantités à diviser présentent « plusieurs types de parts ». Ce troisième cas recouvre les divers sous-cas où les données comportent des fractions de dénominateurs distincts, soit a et $(d + \frac{e}{f} + \frac{g}{h})$, soit $(a + \frac{b}{c})$ et $(d + \frac{e}{f})$, soit $(a + \frac{b}{c})$ et $(d + \frac{e}{f} + \frac{g}{h})$.

L'algorithme exécutant la division débute, dans l'ensemble de ces sous-cas, par l'opération d'"égaliser" que prescrit la clause [5]. Selon les sous-cas, elle transforme les données soit en a et $(d + \frac{eh}{fh} + \frac{gf}{fh})$, soit $(a + \frac{bf}{cf})$ et $(d + \frac{ec}{cf})$, soit en $(a + \frac{bfh}{cfh})$ et $(d + \frac{ech + gfc}{cfh})$. En d'autres termes, elle transforme les fractions fournies dans les données de sorte à « égaliser » les dénominateurs. Quel que soit le sous-cas, le résultat de l'"égalisation" fournit des valeurs qui relèvent du cas précédent. Corrélativement, le texte de la clause [5] de l'algorithme se poursuit par la prescription de l'opération de les « mettre en communication », ramenant, par la même opération que la clause [4], le troisième cas au premier. Ainsi le traitement de ce dernier cas se compose des étapes suivantes : tout d'abord exécuter les opérations prescrites par la clause [5], laquelle comprend [4], puis exécuter [1], [2], [3].

Si nous récapitulons, du point de vue du *texte*, les second et troisième cas sont traités dans un premier temps, respectivement, par les clauses [4] ou [5], puis, dans un second temps, par les clauses [1], [2] et [3]. Du point de vue des opérations cependant, le traitement du troisième cas inclut le traitement du second cas, lequel inclut le traitement du premier cas. Nous sommes à présent en mesure d'observer l'intégration des cas dans un seul algorithme et un seul texte, pour ce qui est des opérations aussi bien que de l'énoncé. Du point de vue des opérations, les traitements des cas sont insérés l'un dans le suivant. Nous verrons, lorsque nous considérerons dans la seconde partie le commentaire de Liu Hui, que ce dernier discute l'algorithme en relation avec le troisième cas et traite donc successivement l'égalisation, la mise en communication et les propriétés des dividendes et diviseur. Pour ce qui est du texte de l'algorithme maintenant, le point clef est qu'en fonction du cas sur lequel la division opère, la liste des opérations adéquates est produite au terme d'un parcours spécifique, qui ne suit certainement pas l'ordre dans lequel les phrases apparaissent dans l'énoncé. Chaque cas requiert une circulation réglée dans le texte pour que soit établie la suite d'opérations à exécuter, circulation guidée par la disposition des conditions. Il ne s'agit pas là d'un texte unique en son genre. On peut établir que des textes d'algorithmes répondant aux mêmes règles ont été composés en Chine depuis au moins le début du IIe siècle avant notre ère jusqu'au moins au VIIe siècle [Chemla, à paraître]. Nous avons donc affaire ici à un type de texte élaboré pour les besoins de l'intégration de cas et présentant une certaine stabilité. Que l'énoncé d'un algorithme requiert une circulation spécifique en fonction des cas, voilà une réalité à laquelle l'écriture contemporaine des algorithmes nous a préparés. Il reste que le type de circulation que requiert le texte chinois examiné diffère de celle qu'appelle un texte en FORTRAN 77 ou en langage C, tout en s'inscrivant dans une tradition d'écriture d'algorithmes. C'est en un sens différent du premier algorithme examiné que l'énoncé de notre seconde procédure s'appréhende dans le temps.

Penchons-nous à présent sur les termes qui prescrivent les opérations. L'examen précédent montre en quel sens les opérations auxquelles renvoient « mettre en communication » ou « égaliser » dépendent des données en présence. Il est important de noter qu'à strictement parler, ce mode de prescription ne se rencontre pas dans les manuscrits mathématiques des troisième et deuxième siècles avant notre ère. Il semble donc là se profiler une histoire des textes employés pour énoncer des algorithmes en Chine ancienne. En nous tournant vers la manière dont Liu Hui les lit, nous verrons ci-dessous qu'il s'agit là de prescriptions non pas directes —au sens où on indique une multiplication par un terme signifiant « multiplier—, mais indirectes, au sens où l'on désigne de façon spécifique les opérations par les raisons qu'il y a à les mobiliser.

Nous avons décrit certaines propriétés des textes d'algorithmes tels qu'on les trouve dans *Les Neuf Chapitres*. Tels sont les énoncés dont les commentateurs chercheront à établir la correction. En examinant certaines de leurs pratiques, nous pourrons approfondir notre étude des caractéristiques des textes de procédures.

L'indication des raisons de la correction dans l'énoncé d'un algorithme

Démontrer qu'un algorithme est correct, c'est établir que sa mise en œuvre sur les données auxquelles il est appliqué produit la grandeur attendue ainsi qu'une valeur correcte pour cette grandeur — que cette valeur soit exacte ou approchée en un sens à déterminer. Je m'intéresserai ici spécifiquement à celles des démonstrations qui présentent une corrélation forte avec l'énoncé de l'algorithme qu'elles visent à démontrer. Les sources anciennes illustrent deux modalités de telles corrélations. J'en esquisserai la description sur la base de textes prélevés dans *Les Neuf Chapitres*, tout en signalant d'autres documents où l'on peut les repérer.

Enoncés d'algorithmes à la structure transparente

J'expliquerai le sens que je donne ici au qualificatif de « transparent » en m'appuyant sur un texte extrait du commentaire de Liu Hui lui-même. Ce n'est que dans un second temps que je reviendrai aux *Neuf Chapitres* et à d'autres documents. Dans ce passage, après avoir établi la correction de l'algorithme fourni par *Les Neuf Chapitres* pour déterminer l'aire d'un cercle lorsque l'on dispose de son diamètre et de sa circonférence, le commentateur entreprend de calculer des approximations pour les entiers exprimant le rapport entre ces deux données meilleures que les valeurs de 1 et 3 employées par le classique[11]. C'est dans ce contexte qu'il formule un algorithme visant, entre autres, à déterminer une valeur pour la circonférence d'un cercle de diamètre 2 *chi* (unité de longueur), tout en établissant la correction de cette procédure. Je m'intéresserai ici aux liens qui unissent algorithme et démonstration. L'idée générale de la procédure consiste à itérer une sous-procédure qui permet, connaissant la valeur du côté d'un *n*-gone régulier inscrit dans le cercle, de calculer celle du côté du 2*n*-gone régulier. Liu Hui amorce la procédure avec l'hexagone, dont le côté, nous a dit-il plus haut, a même longueur que le rayon du cercle. Je me contenterai d'analyser les premières étapes de la « Procédure consistant à couper le 6-gone pour en faire un 12-gone 割六觚以爲十二觚術 », puisqu'elles suffisent à illustrer le phénomène qui m'intéresse. Liu Hui a décrit une figure dans la partie antérieure de son commentaire[12]. Cette figure, qui n'a pas été transmise par la tradition écrite, est essentielle pour suivre le document sur lequel je me penche ici. J'en propose donc une restitution, appuyée sur ce qu'en dit le commentateur (voir Figure 1). Insistons cependant sur le fait que je ne cherche pas ici à reproduire les traits spécifiques qu'aurait pu avoir la figure ancienne, employant au contraire les modalités contemporaines d'usage des diagrammes. Ce point n'a aucun impact sur la propriété du texte qui m'intéresse.

[11] En fait, il cherche un ensemble de valeurs cohérents pour les données relatives à un cercle, mais je simplifierai ici dans la mesure où cela n'a pas d'impact sur les idées que je mets en discussion.

[12] Le lecteur trouvera dans [Chemla and Guo Shuchun, 2004, 179—183] et les notes à la traduction un édition critique du texte, la traduction en français commentée et le renvoi à une bibliographie sur le sujet.

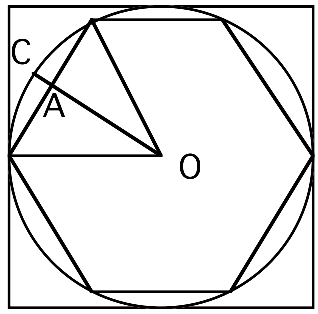

Figure 1: Reconstitution de la figure qui sous-tend le commentaire de Liu Hui relatif au calcul de la circonférence d'un cercle

Les historiens s'accordent à interpréter des énoncés semblables à la première phrase de cet algorithme, « plaçons le diamètre du cercle, 2 *chi* 置圓徑二尺 », comme renvoyant à la surface sur laquelle les calculs s'effectuaient en représentant les nombres à l'aide de baguettes. Elle prescrit ici, plus précisément, de placer la valeur du diamètre pris pour base des opérations sur cet instrument de calcul. Liu Hui examinera l'impact des calculs suivants tout à la fois sur le sens des grandeurs obtenues en opérant sur le diamètre et sur les valeurs produites[13]. La seconde phrase du passage illustre ce fait :

« Si l'on en prend la moitié, cela fait 1 *chi* et donne les côtés de l'hexagone inscrit dans le cercle. 半之爲一尺，即圓裏觚之面也。[14]»

L'opération de calcul de la moitié est considérée du point de vue de la valeur obtenue aussi bien que sous l'angle de la grandeur produite. Il est particulièrement important d'analyser plus avant ce dernier aspect, à savoir, la manière dont Liu Hui formule l'interprétation du résultat de l'opération. Le commentateur aurait pu l'exprimer comme étant le rayon du cercle. La chose est vraie, évidente, et elle sera utilisée immédiatement après. Mais, nous le verrons, elle ne permettrait pas d'articuler, comme le commentateur l'entreprend, le « sens » des pas à venir de l'algorithme. La formulation de l'interprétation des étapes successives compose un raisonnement qui vise à établir le sens de la valeur finale produite par l'algorithme. En ce sens, il s'agit d'une opération clef pour démontrer la correction d'un algorithme, une opération de surcroît qui rend compte de l'emploi d'algorithmes au sein des démonstrations. Sur un autre plan, notons qu'en exprimant l'interprétation de la grandeur produite comme « les côtés de l'hexagone inscrit dans le cercle », Liu Hui mobilise une connaissance géométrique qu'il a introduite auparavant. Le texte condense ici le raisonnement dans le simple acte de formuler le sens de la grandeur. Le succès de cette opération, comme de celles que nous examinerons dans le prochain paragraphe, exige la présence, virtuelle ou matérielle, du diagramme. En effet, la prochaine étape du texte consistera à introduire le triangle rectangle que nous désignons, par référence à la figure 1, par OAB. Conformément à l'usage établi au temps de Liu Hui, pareil triangle est indiqué en fournissant les moyens d'identifier ses côtés, lesquels ont pour noms techniques base (*gou*) pour le plus court, hauteur (*gu*) pour le second et hypoténuse (*xian*) pour le dernier. Voici comment le commentateur réalise cette tâche ici :

[13] La dissociation de ces deux aspects est essentielle, et le cas de l'aire du cercle le montre de manière claire, voir [Chemla, 2005].

[14] Le texte dit exactement « le polygone 觚 dans le cercle ». Sur l'interprétation de ce terme comme polygone, voir le glossaire de la terminologie technique que j'ai compilé [Chemla and Guo Shuchun, 2004, 926]. Dans le contexte, le polygone traité est l'hexagone, le même que celui dont le commentaire traite depuis le début, à savoir l'hexagone régulier inscrit. Précisons également qu'on peut comprendre « le côté » ou « les côtés » de l'hexagone.

« On prend le demi-diamètre, 1 *chi*, comme hypoténuse, la moitié du côté, 5 *cun*, comme base (*gou*), et l'on cherche la hauteur (*gu*) qui leur correspond. 令半徑一尺爲弦，半面五寸爲句，爲之 求股 。»

Le demi-diamètre OB est lu comme hypoténuse et sa valeur ne pose pas de difficulté. Le fait, pour un lecteur, d'identifier la moitié du côté comme, par exemple, AB découle de sa désignation comme « base » d'un triangle rectangle dont OB est l'hypoténuse. Il s'agit en tout cas d'une partie d'un côté de l'hexagone attenant à l'hypoténuse et déterminé, en nos termes, par la perpendiculaire issue de O sur le côté en question. L'affirmation qu'il s'agit de la « moitié du côté » incorpore, elle aussi, un fait géométrique relatif à la figure. Enfin, c'est précisément à ce point que l'interprétation de l'étape précédente est utile pour exprimer sa valeur comme égale à la moitié du rayon, à savoir, avec les unités de longueur chinoises qu'emploie Liu Hui, 5 *cun*. Que la même valeur de 1 *chi* soit interprétée comme renvoyant parfois au demi-diamètre et parfois au côté de l'hexagone est essentiel au développement du raisonnement. Notons, par ailleurs, que la désignation de AB comme « moitié du côté » implique une opération, qui est nécessaire à l'algorithme déployé dans le texte et dont le résultat numérique est immédiatement fourni. Pareille prescription d'opérations, par énoncé d'un sens de la grandeur produite, est fréquente dans les textes d'algorithmes.

L'ensemble de la phrase que nous venons de disséquer énonce un problème. C'est ce qu'indique le terme de « chercher 求 » que Liu Hui emploie couramment en pareil cas. L'énoncé signale simultanément un fait —l'identification d'un triangle rectangle— qui assurera la correction de la procédure formulée dans les phrases suivantes. Sans que le nom de l'opération ne soit cité, la « procédure de la Base et de la hauteur » —l'équivalent de notre théorème de Pythagore dont traite le neuvième des *Neuf Chapitres*— est en effet mobilisée par la suite. Le commentateur peut dès lors affirmer le sens du résultat produit, que je marque en lettres grasses ci-dessous :

« Le carré (*mi*) de la base (*gou*)[15], 25 *cun*, étant soustrait du carré (*mi*) de l'hypoténuse, il reste 75 *cun*. On divise ceci par extraction de la racine carrée, en continuant jusqu'aux *miao*, aux *hu*. Et l'on rétrograde encore une fois le diviseur, pour trouver un chiffre de la partie décimale (*weishu*) (de la racine)[16]. Le chiffre de la partie décimale qui n'a pas de nom [d'unité], on le prend

---

[15] On relève ici le même phénomène que celui décrit plus haut : la prescription de l'opération d'élever au carré se fait dans la manière de désigner les termes de la soustraction.

[16] Notons que le *cun*, qui est le dixième du *chi,* est pris comme unité de base pour tenir lieu ici d'unité de longueur aussi bien que d'unité de surface. Il faut comprendre que l'unité de surface est la mesure d'un carré de côté 1 *cun.* La suite du calcul mentionne de nombreuses unités du système décimal des longueurs. Par ailleurs, Liu Hui recourt ici à l'algorithme d'extraction de la racine carrée présenté au chapitre 4 des *Neuf Chapitres* (après le problème 4.16). Je traduis le nom de cette opération par « diviser par extraction de la racine carrée » pour refléter le lien que la terminologie en chinois établit entre extraction et division. Liu Hui reprend l'algorithme des *Neuf chapitres* dans la version améliorée qu'il en a proposée à l'occasion de son commentaire : poursuivant l'algorithme au-delà du chiffre des dernières unités, les *hu* (c'est à cette opération que renvoie le terme de « rétrograder »), le commentateur détermine le premier chiffre de la partie décimale. Ce chiffre est pris pour numérateur d'une fraction de dénominateur 10, laquelle est ensuite simplifiée. Telle est la pratique suivie pour le traitement de la partie décimale après le IIIe siècle et ce, à ma connaissance, jusqu'au XIIIe siècle, à ce dont témoignent les documents qui nous sont parvenus.

comme numérateur, et on prend 10 comme dénominateur. Cela fait, en simplifiant, 2/5 de *hu*. **Par conséquent** on obtient, **la hauteur** (*gu*), 8 *cun* 6 *fen* 6 *li* 2 *miao* 5 *hu*, 2/5 de *hu*.
以句冪二十五寸減弦冪，餘七十五寸。開方除之，下至秒、忽。又一退法，求其微數。微數無名知以爲分子，以十爲分母，約作五分忽之二。**故得股**八寸六分六氂二秒五忽五分忽之二。»

Comme nous l'avons analysé plus haut, le texte continue de fournir tout à la fois le sens du résultat produit par un ensemble d'opérations (la hauteur) ainsi que sa valeur. Cependant, plusieurs légères différences méritent d'être relevées.

Tout d'abord, contrairement à plus haut, ce n'est plus le sens du résultat d'une simple opération qui est formulé, mais celui d'une sous-procédure : « soustraire l'un de l'autre les carrés, respectivement, de la base et de l'hypoténuse ; extraire la racine carrée. » Cette procédure est énoncée en ouverture du chapitre 9, au sein de l'ensemble d'algorithmes intitulés « Base et hauteur », qui permettent de résoudre les trois problèmes fondamentaux relatifs à un triangle rectangle : connaissant deux de ses côtés, trouver le troisième. La correction des algorithmes en question est abordée dans le commentaire que Liu Hui insère, au chapitre 9, à la suite de leur formulation. C'est en reconnaissant, pour le calcul qu'il vise à conduire, la pertinence d'un problème, au sens de ceux dont *Les Neuf Chapitres* se composent, et en employant la procédure le résolvant que Liu Hui peut affirmer ici que la grandeur produite par la sous-procédure est la hauteur —pour nous, OA. Nous percevons ici un lien entre l'élément textuel du « problème » et la formulation du sens d'une opération ou d'une procédure. Nous y reviendrons. Retenons pour l'instant qu'à suivre, dans le temps où elle se donne, la liste d'opérations, il est plus propice, selon les cas, d'interpréter le sens de la grandeur fournie soit par une opération soit par un bloc d'opérations.

Penchons-nous à présent sur la valeur numérique produite ici par la liste d'opérations. Pour des raisons claires, l'interprétation du résultat des opérations est exacte, alors que cette valeur, elle, est donnée de façon approchée[17]. Au terme de l'algorithme, il en sera de même. La signification de la grandeur produite sera déterminée de façon exacte par la poursuite du raisonnement dont nous examinons l'amorce. Cependant, la question se pose de savoir en quel sens le nombre proposé en fin de compte pour exprimer la circonférence d'un cercle de diamètre 2 *chi* satisfait à cette attente. La réponse à cette inquiétude requiert d'examiner la conduite spécifique des calculs. Cet écart fait percevoir pourquoi il importe que le résultat de chaque opération soit donné de façon double, grandeur et valeur. L'algorithme doit fournir théoriquement non seulement la grandeur cherchée, mais également une valeur associée qui soit correcte. Les détails dans lesquels le texte entre, à propos de l'approximation avec laquelle il convient de déterminer la racine, relève de ce dernier ordre de préoccupations. Ainsi la prescription d'extraire la racine est suivie de recommandations sur la *manière* d'exécuter *ici* cette opération[18]. La raison fondamentale en est que l'algorithme n'est pas général, mais vise à produire la valeur d'une circonférence particulière correspondant à un diamètre donné. Ou, pour être précis, l'algorithme

[17] Liu Hui insiste sur le caractère approché de ce type de résultat dans son commentaire sur l'algorithme d'extraction de la racine carrée ([Chemla and Guo Shuchun, 2004, 362—365]). Pourquoi n'opte-t-il pas, comme il le fait ailleurs, pour l'expression du résultat sous la forme « racine de 75 *cun* » ([Chemla and Guo Shuchun, 2004, 380—383]) ? C'est un point dont les raisons restent à élucider. J'observe pour l'instant ce texte-ci. [Volkov, 1994] analyse en détail la conduite du calcul, qui présente des traits spécifiques. Je laisse ici cet aspect de côté.

[18] Lorsque le nombre n'est pas un carré parfait, l'algorithme d'extraction de racine laisse au praticien le choix d'opter pour un résultat approprié aux fins pour lesquelles il mobilise la procédure et de déterminer le mode d'application adéquat. Le « grain » du texte de la procédure — au sens où je l'ai défini dans [Chemla, 2010b, Chemla, à paraître]—présente ici une discontinuité.

en tant qu'il produit des grandeurs est général, ce que n'est pas l'algorithme en tant qu'il fournit des valeurs numériques. Que le couple de nombres obtenu en conclusion pour le diamètre et la circonférence soit *lui* général relève d'autres considérations. Notons cependant que les recommandations sur le résultat numérique voulu ici ne sont assorties ni de commentaire, ni d'explication.

Par la suite, le commentateur introduira le triangle ABC, dont hauteur et base sont connues, et déterminera, toujours à l'aide du théorème de Pythagore, le côté du dodécagone. La procédure globale, dont nous n'avons examiné que le segment initial, sera alors itérée pour produire les côtés de la suite de polygones obtenus par duplication du nombre des côtés et déterminer, en fin de parcours, les valeurs cherchées. L'ensemble de ce texte relève de la même analyse que celle que j'ai développée à propos des premiers pas, et je ne l'examinerai pas plus avant, car je dispose des éléments nécessaires à mon propos.

Dans cette partie de son commentaire, Liu Hui expose un algorithme à la manière dont *Les Neuf Chapitres* rédige la procédure pour déterminer le volume de la pyramide tronquée à base circulaire, que nous avons citée plus haut. Cet algorithme vise à produire des valeurs correspondant à des grandeurs. Les étapes successives, qu'elles soient simple opération ou sous-procédure, en sont interprétées et exécutées, de telle sorte qu'au terme du développement, le commentateur a établi la correction de l'algorithme et calculé une valeur. D'une part, il a montré que la liste d'opérations décrite produit bel et bien la grandeur cherchée. D'autre part, il a simultanément obtenu une meilleure valeur pour la circonférence d'un cercle de diamètre 2 *chi* — ainsi, en fait, que d'autres grandeurs.

Nous sommes à présent en mesure de revenir à notre problématique générale. Ce texte est intéressant dans la mesure où l'algorithme et sa démonstration s'y trouvent combinés en un unique exposé, rédigé par la même plume. Son examen nous a permis de proposer quelques remarques sur certains éléments fondamentaux de la démonstration d'algorithme. Cependant, je m'intéresse ici plus spécifiquement aux conditions, portant sur le texte de l'algorithme, qui rendent possible ce mode d'écriture. Le fait est que la liste d'opérations est exposée de manière telle que le sens des opérations individuelles ou des sous-procédures *peut* être formulé au *fil du texte* de l'algorithme. Il n'en va pas toujours de même, comme nous le montrerons dans la partie suivante. Or on peut ici argumenter que Liu Hui a présenté à dessein la liste d'opérations de manière à lui conférer cette propriété d'"interprétabilité". En effet, il énonce dans cette liste, et à plusieurs reprises, deux opérations opposées qui se suivent immédiatement et dont les effets s'annulent. Du point de vue des calculs *stricto sensu*, ces opérations sont donc inutiles. Qui plus est, Liu Hui n'exécute pas ces opérations, reprenant, comme résultat de la seconde, la valeur à laquelle la première aurait dû être appliquée. Il est donc parfaitement conscient de leur caractère superflu pour le calcul. Quel intérêt peut-il trouver à ce qui apparaît comme un détour inutile ? Le seul enjeu qu'on peut déceler dans le choix de les insérer dans le texte de l'algorithme qu'il compose, c'est que ces deux opérations sont essentielles à son "interprétabilité" : la première opération conclut une sous-procédure, tandis que la seconde opération en commence une, et leur présence va de pair avec le fait que l'interprétation de chacune de ces sous-procédures peut être formulée [Chemla, 2005]. La propriété du texte de pouvoir s'interpréter au fil de son exposé paraît donc avoir été l'objet d'un véritable choix.

Si je reviens aux conditions que doit satisfaire le texte de l'algorithme pour qu'il en soit ainsi, nous voyons que son énoncé doit présenter une *structure* particulière, au sens où il doit pouvoir se dissocier en blocs tels que leur interprétation peut amener, de proche en proche, à établir le sens du résultat global. Cette propriété caractérise l'une des formes de transparence que la formulation d'une procédure peut présenter au regard des raisons de sa correction. Au fait, comme je le soulignais plus haut, que le texte de l'algorithme s'appréhende de façon spécifique dans le temps répond le fait que la démonstration aborde cet énoncé dans le même temps, du début à la fin et de proche en proche.

Le point clef ici, c'est qu'à la manière dont Liu Hui établit la correction d'un certain nombre d'algorithmes des *Neuf Chapitres* dans son commentaire, il révèle le caractère transparent en ce sens de leur formulation tout en l'exploitant. En effet, il est plusieurs algorithmes dont son commentaire suit le texte de proche en proche, énonçant, d'opération en opération, de bloc en bloc, une suite d'interprétations qui aboutissent en fin de compte à établir le sens du résultat final [Chemla, 1991]. Rappelons que *Les Neuf Chapitres* ne comportent, pour l'essentiel, que problèmes et algorithmes. On n'y trouve donc pas de texte comparable au passage de Liu Hui analysé ci-dessus. Mais le commentateur aborde certains énoncés d'algorithmes à la manière dont il traite la liste d'opérations qu'il produit lui-même dans le passage examiné, en insérant des interprétations pas à pas. Or l'on retrouve certains de ces algorithmes, formulés de la même façon, dans le manuscrit daté d'avant *ca* 186 avant notre ère qui s'intitule *Livre de procédures mathématiques*[19]. C'est dire la stabilité de ces énoncés aussi bien, peut-être, que l'intérêt qu'ils suscitent. Toutefois ce type de transparence ne caractérise pas, loin de là, les seuls textes chinois. L'interprétation que donne Jens Høyrup de tablettes mésopotamiennes et à laquelle je reviens ci-dessous exploite le fait que nombre d'algorithmes sur lesquels il se penche sont rédigés de façon transparente. Par ailleurs, les textes des algorithmes fondamentaux qu'al-Khwarizmi énonce, dans son *Livre d'algèbre et d'al-muqabala*, pour les équations quadratiques complètes, au sens où elles comportent trois termes, manifestent eux aussi cette même propriété de transparence. C'est ce que montrent les démonstrations que l'auteur propose et qui formulent pas à pas une interprétation des résultats des opérations successives énoncées jusqu'à établir que le sens du résultat final est conforme à l'affirmation qui clôt l'algorithme [Rashed, 2007, 100—121]. Là encore, on peut avancer l'hypothèse que cette propriété du texte n'est pas le fruit du hasard et que l'auteur valorise, d'une part, ce mode d'énoncé pour une procédure, d'autre part, les démonstrations qui mettent en œuvre la transparence. Al-Khwarizmi expose en effet deux démonstrations pour son premier type d'équation complète. C'est le seul cas pour lequel l'auteur nous donne deux preuves. Corrélativement, la première est la seule de ses démonstrations à ne pas suivre strictement l'ordre dans lequel l'énoncé formule la liste d'opérations. La seconde, par contraste, interprète pas à pas le texte de l'algorithme. On peut donc estimer qu'al-Khwarizmi est conscient de la transparence du texte et qu'il souhaite proposer des démonstrations qui l'exploitent.

Les énoncés de tous ces algorithmes partagent la propriété d'avoir une structure propice à l'interprétation. Il est cependant une autre condition essentielle pour que pareille démonstration puisse être formulée : la présence de dispositifs permettant l'interprétation. Dans l'ouvrage d'al-Khwarizmi, des diagrammes géométriques, dont l'auteur décrit la construction tout en interprétant l'énoncé de l'algorithme, offrent les ressources nécessaires pour formuler le sens des opérations successives. Jens Høyrup reconstitue, pour sa part, également des diagrammes géométriques, qui paraissent toutefois différents des précédents dans leur matérialité. Comme je l'évoquerai ci-dessous, ils semblent susceptibles d'être manipulés et transformés matériellement. Pour le cas de la Chine, nous avons vu ici le rôle clef que jouait le diagramme auquel Liu Hui renvoie et dont j'ai proposé une reconstitution. En fait, selon les algorithmes, le commentateur recourra à divers dispositifs. Ce sont des blocs qui lui servent de ressources pour interpréter des algorithmes relatifs au calcul de volumes. Plus généralement, il emploie les problèmes, tout particulièrement les situations qu'ils décrivent, pour pratiquer l'opération d'interprétation [Chemla, 2009b]. Ceci n'est pas pour nous surprendre puisque nous avons vu plus haut la formulation d'un problème apparaître dans la production et l'interprétation d'un segment d'un algorithme. Cependant Liu Hui n'utilise pas seulement les problèmes géométriques, nous en verrons un exemple dans la dernière partie de ce texte. Le fait que n'importe quel type de problème puisse devenir un dispositif propice

[19] Voir par exemple les algorithmes donnés pour calculer le volume de solides [PENG Hao彭浩, 2001, 103—105].

à déterminer le sens d'une opération distingue la manière dont le commentateur procède sous ce rapport des témoignages que nous ont laissés d'autres traditions.

Revenons une dernière fois au passage du commentaire au cercle que nous avons disséqué ci-dessus pour relever un fait. Nous avons tiré parti de cet extrait pour mettre au jour l'existence de textes d'algorithmes « transparents ». Il éclaire cependant un autre versant de l'activité mathématique : il montre comment pareils énoncés, et les algorithmes auxquels ils renvoient, sont parfois produits. Ce mode de travail constitue-t-il plus généralement le soubassement de tels textes ? Je me contenterai ici de soulever la question, sans tenter d'y répondre, afin de me tourner vers une autre modalité d'énonciation par le biais de laquelle des textes d'algorithmes pointent vers les raisons de leur correction.

Comment la prescription d'opérations pointe vers les raisons de la correction d'un algorithme

Curieusement, si divers textes d'algorithmes partagent la particularité de pointer vers les raisons de leur correction, on rencontre deux modalités très différentes de réalisation de cette propriété. J'illustrerai ici la seconde modalité par l'énoncé de la procédure prescrivant comment effectuer une division entre quantités de divers genres, que nous avons examiné en première partie de cet article. La méthode que je suivrai ici pour établir la propriété que j'avance fera un usage essentiel du témoignage du commentaire aux *Neuf Chapitres.* J'examinerai en effet comment Liu Hui, alors même qu'il établit la correction de l'algorithme, avance des arguments qui donnent une place clef aux termes auxquels recourt la formulation de l'algorithme. C'est de là que je conclurai qu'il saisit, dans l'énoncé de la procédure lui-même, l'indication des raisons de la correction. Les deux termes qui seront au centre de la discussion sont ceux-là même dont j'ai laissé l'analyse en attente plus haut : « égaliser » et « mettre en communication ». Nous verrons que, d'une part, le commentateur nous permet d'interpréter ces termes en matière de calculs concrets et, d'autre part, qu'il corrèle leur signification à des arguments.

Rappelons que le texte de l'algorithme des *Neuf Chapitres* permet de traiter, au prix d'une lecture singulière, trois ensembles de cas. Ils se caractérisent par le fait que la procédure réglant le troisième cas le ramène au second cas, tandis que les opérations résolvant ce dernier le réduisent au premier cas. Nous avons analysé comment la formulation de l'algorithme indiquait ces emboîtements. Liu Hui, pour sa part, ne s'attachera qu'au troisième cas et commentera les opérations qu'il nécessite dans l'ordre dans lequel elles doivent être employées : l'égalisation, d'abord ; ensuite, la mise en communication ; et finalement la division. Sa lecture confirme les conclusions de la première partie de l'article présent, en manifestant la circulation qu'il est nécessaire de pratiquer sur l'énoncé pour produire la liste d'opérations à exécuter. Nous lirons successivement les parties de son commentaire relatives à ces différents temps[20].

Le premier paragraphe de Liu Hui fait référence à l'algorithme que *Les Neuf Chapitres* ont décrit, plus haut dans le même chapitre, pour additionner des fractions. Il nous faut donc fournir ici quelques éléments d'information à ce sujet[21]. Pour sommer des fractions en nombre quelconque —nous prendrons ici, par commodité, a/b et c/d— cet autre algorithme prescrivait deux opérations dont le commentaire de Liu Hui met en évidence le sens et l'importance. D'une part, *Les Neuf Chapitres* invitent à ce que « les dénominateurs multiplient les numérateurs qui ne leur correspondent pas ». Sur notre exemple, cela correspond au calcul de ad et de bc, deux valeurs qui seront ensuite additionnées pour former un dividende. D'autre part, *Les Neuf Chapitres* prescrivent de calculer bd à l'aide de l'énoncé suivant : « les dénominateurs multipliés entre eux

[20] J'ai développé dans [Chemla, à paraître] une analyse détaillée de ce trait du commentaire et m'en tiendrai ici à en indiquer les grandes lignes.

[21] Je serai ici lapidaire. Le lecteur est invité à se reporter à la traduction en français et à ses notes pour plus d'information.

font le diviseur ». Liu Hui s'arrête longuement sur ces deux opérations, mettant en évidence que la seconde « égalise » les dénominateurs, permettant ensuite aux fractions d'être sommées, tandis que la première transforme corrélativement les numérateurs correspondants pour ne pas perdre les valeurs d'origine. Le commentateur désigne cette dernière opération par le terme d'"homogénéiser" et discute des raisons de la validité de cette transformation conjointe. Combinées, ces deux opérations transforment ce que nous écrivons sous la forme *a/b* et *c/d* en *ad/bd* et b*c/bd*. En ouverture à son commentaire à l'algorithme qui nous intéresse ici, Liu Hui cite la formulation des *Neuf Chapitres* dans le contexte de l'addition des fractions —citation que des guillemets indiquent ci-dessous— et évoque son propre commentaire sur la question. En voici les deux premières phrases :

«Si "les dénominateurs multiplient les numérateurs qui ne leur correspondent pas", c'est pour homogénéiser ces numérateurs. Si "les dénominateurs sont multipliés les uns par les autres", c'est pour égaliser ces dénominateurs. 母互乘子知，齊其子。母相乘者，同其母。»

On note que Liu Hui fait donc ici écho à l'occurrence du terme « égaliser » dans le texte énonçant l'algorithme de division dans *Les Neuf Chapitres*. Il le met en vis-à-vis de son propre emploi du même mot dans le contexte d'une démonstration antérieure. Ce faisant, il lui associe un autre terme qui lui fait pendant, celui d'"homogénéisation", lui aussi extrait du texte de la même démonstration. De surcroît, en rappelant quels calculs il a ailleurs interprété en ces termes, il formule indirectement une traduction, à l'aide des noms ordinaires des opérations arithmétiques, des calculs auxquels peut correspondre ici l'injonction d'"égaliser". L'interprétation que j'ai proposée de cette opération d'"égalisation", prescrite pour ce cas de division par *Les Neuf Chapitres*, suggère que, selon le sous-cas auquel on a affaire, soit a et $(d + \frac{e}{f} + \frac{g}{h})$ sont transformés en a et $(d + \frac{eh}{fh} + \frac{gf}{fh})$, soit $(a + \frac{b}{c})$ et $(d + \frac{e}{f})$ le sont en $(a + \frac{bf}{cf})$ et $(d + \frac{ec}{cf})$, soit $(a + \frac{b}{c})$ et $(d + \frac{e}{f} + \frac{g}{h})$ deviennent $(a + \frac{bfh}{cfh})$ et $(d + \frac{ech + gfc}{cfh})$.

L'emploi de formules modernes doit aider à repérer les calculs prescrits, sans pour autant qu'elles doivent se substituer aux écritures anciennes sur la surface à calculer. On constate que les calculs à effectuer correspondent précisément à ceux que Liu Hui introduit en relation avec homogénéisation et égalisation dans les premiers énoncés de son commentaire à la division. La raison de leur correction n'a pas varié en changeant de contexte. On remarque également que le simple terme « égaliser » renvoie à une pluralité d'opérations qui réalisent conjointement le même objectif. Au total, pour le commentateur, les calculs auxquels correspond ce terme dans ce contexte sont prescrits par la raison fondamentale qu'il y a de les exécuter : égaliser les dénominateurs, ce qui ramène ce cas au second.

Le commentaire de la seconde opération à exécuter pour diviser, « mettre en communication », nous conduira à des conclusions de même nature. Liu Hui écrit :

« A l'aide du dénominateur, "les faire communiquer", c'est multiplier par le dénominateur les parties entières, et incorporer ceux-ci (les résultats) aux numérateurs. En multipliant, on désagrège les parties entières, cela fait alors les parts des produits (*jifen*) ; les parts des produits (*jifen*) et les numérateurs communiquent alors les unes avec les autres, c'est pourquoi on peut les faire se rejoindre les unes les autres.
以母通之者，分母乘全内子。乘，散全則爲積分，積分則與分子相通，故可令相從。»

Le premier membre de phrase comporte le verbe « faire communiquer » et précise ce à l'aide de quoi on réalise cette opération : le dénominateur. Dans l'interprétation que je donne, il s'agit du dénominateur unique que l'"égalisation" a produit, si l'on est dans le cadre du troisième cas, à moins que ce ne soit le seul dénominateur qui se présente dans les données pour le second cas[22]. Cet énoncé de Liu Hui détaille dans un premier temps, à l'aide de prescriptions directes (multiplier, incorporer), les opérations auxquelles « faire communiquer » correspond. Pour simplifier, représentons le cas devant lequel le praticien se trouve à ce stade par la formule suivante : $(a + \frac{b}{c}) / (d + \frac{e}{c})$. Liu Hui indique qu'il s'agit ici de multiplier les parties entières, soit a et d, par le dénominateur c et d'ajouter les résultats aux numérateurs. On obtient en fin de compte $ac + b$ et $cd + e$. Le simple fait que le commentateur propose une traduction en instructions exprimées à l'aide des termes usuels désignant les opérations arithmétiques révèle qu'à ses yeux, le vocable de « faire communiquer » n'est pas une modalité ordinaire de renvoi aux calculs visés. Cette opération, permettant d'ajouter entiers et fractions, se présente pour la première fois dans le classique. C'est peut-être la raison pour laquelle, à la différence de la concision du commentaire sur l'égalisation, Liu Hui traite, aussitôt ces calculs énoncés, du sens des opérations pratiquées au regard des réalités en présence. En matière de fractions, la signification des actions s'exprime sur deux plans. Les fractions sont envisagées, d'un point de vue matériel, comme collections de « parts » —elles sont un certain nombre de « c-ièmes »— ou, d'un point de vue numérique, comme un couple formé d'un numérateur et d'un dénominateur. Lorsqu'il formule le sens de la multiplication par le dénominateur —c, dans nos notations— en énonçant qu'elle « désagrège les parties entières », Liu Hui reprend un terme introduit plus haut en relation avec les fractions. On comprend que chaque unité de l'entier est coupée en c parties dont chacune mesure un c-ième. Le nombre de ces parties s'élève donc à ac, ce à quoi renvoie le terme de « parts du produit ». Cette dernière expression combine un aspect matériel de l'interprétation (parts) et un aspect numérique (nombre de parts, soit numérateur)

A ce point du commentaire, le lecteur s'est donc vu expliquer les opérations à exécuter et leur sens au regard des réalités sur lesquelles il travaille. C'est l'énoncé suivant de Liu Hui qui est essentiel pour mon propos. Rappelons-le, en soulignant le point sur lequel portera l'analyse : « les parts des produits et les numérateurs *communiquent* alors *les unes avec les autres*, *c'est pourquoi* on peut les faire se rejoindre les unes les autres. » Le commentateur observe la situation produite par la multiplication. Il l'observe sous l'angle du sens qu'il vient de formuler. Ceci l'amène à reformuler ce sens, non plus par rapport à chacune des entités prises séparément, mais du point de vue de leur ensemble. Par suite, il remarque que désormais entiers et fractions sont constitués de la même unité, ce qu'il formule de façon significative par le terme même à l'aide duquel *Les Neuf Chapitres* prescrivent l'opération : *tong* « communiquer, faire communiquer ». Il *déduit*, de cet état, que ces deux entités peuvent désormais être sommées.

Si nous récapitulons, Liu Hui met la prescription de « faire communiquer » en relation avec des opérations arithmétiques sur les éléments en présence et interprète le *sens* de ces opérations en deux étapes, l'une déduite de l'autre. La première commente les résultats à un niveau matériel (désagréger), la seconde à un niveau formel (communiquer). La caractéristique de cette dernière interprétation est qu'elle se présentera dans nombre d'autres contextes où son sens concret diffèrera, mais où, de la même manière, la « mise en communication » d'entités sera essentielle au bon fonctionnement de l'algorithme. Nous reviendrons sur ce point plus loin. Ce qui importe ici, c'est que l'effet des opérations est finalement capté en termes de « mise en communication », à savoir en faisant écho au texte de l'algorithme tel qu'on le trouve dans *Les*

[22] Rappelons que nous sommes au point du flot de calculs où le troisième cas a été ramené au second, il est donc normal que nous ayons la même opération pour les deux branches de l'alternative.

Neuf Chapitres. On retrouve donc les mêmes conclusions que plus haut, pour l'égalisation. D'une part, Liu Hui fait écho, dans son analyse des raisons pour lesquelles la procédure est correcte, aux mots avec lesquels le classique prescrit indirectement les opérations. D'où l'idée que le commentateur lit dans ce texte même une indication des raisons de la correction. D'autre part, le terme de « mettre en communication » renvoie à une combinaison d'opérations qu'il revient au lecteur de déterminer en fonction de la situation traitée.

Mais ici, il y a plus. L'écho que Liu Hui donne à ce vocable de « mise en communication » ne s'arrête pas là. Ce terme reviendra dans le commentaire, pour discuter d'un autre problème que le commentateur envisage en relation avec l'algorithme. Exposons-le sur un exemple du troisième cas que nous représentons, en termes modernes ainsi : supposons qu'on doive diviser l'un par l'autre $(a + \frac{b}{c})$ et $(d + \frac{e}{f})$. A la suite des deux opérations envisagées, si l'on suit à la lettre le commentateur, on a produit $acf + bf$ ainsi que $dcf + ed$. On est dès lors ramené au premier cas et l'on doit diviser le premier par le second. Ceci suppose d'avoir rendu compte des raisons pour lesquelles on pouvait substituer à la division de $\frac{acf + bf}{cf}$ par $\frac{dcf + ec}{cf}$ la division de $acf + bf$ par $dcf + ed$. C'est cette question dont traite le paragraphe suivant. Liu Hui reprendra le terme de « communication » pour renvoyer à la propriété que confère au dividende et au diviseur le fait d'être réunis comme opérandes d'une division. C'est cette propriété qui nécessite et qui justifie tout à la fois le fait que dès lors, ils doivent être modifiés conjointement. On remarquera immédiatement que le sens concret de cette « communication » diffère de celui que revêtait le terme plus haut. Formellement, il s'agit de la même propriété, mais matériellement elle prendra plus largement, dans le commentaire, des sens différents.

La manière dont le commentateur aborde ce second pan de considérations relatif à la « communication » peut surprendre. En effet, conformément à sa manière usuelle de procéder, il se place dans un premier temps d'emblée à un niveau plus général, saisissant cette opportunité pour introduire le concept dont relèvent dividende et diviseur, avant de revenir à eux spécifiquement[23]. Il faut lire, dans pareil mouvement d'argumentation, tout à la fois un commentaire sur la situation en discussion et une volonté de mettre en évidence qu'il se joue, en elle, quelque chose de plus général. Le concept en question est celui de *lü*. Il joue un rôle clef aussi bien dans *Les Neuf Chapitres* que dans les commentaires[24]. Le caractère général du concept et son lien avec la mise en communication sont clairs dès son introduction, dans les phrases par lesquelles Liu Hui poursuit son commentaire sur la division :

« Chaque fois que des quantités (*shu*) sont données en relation les unes avec les autres, on les appelle des *lü*. Puisque des *lü* sont donnés les uns en relation avec les autres, ils communiquent. 凡數相與者謂之率。率知，自相與通。»

Le terme de *lü* s'emploie pour désigner des ensembles de quantités attachées, chacune, à une entité et exprimant les rapports entre ces entités. Ces quantités sont donc associées les unes aux autres de manière telle qu'elles varient conjointement, devant être multipliées ou divisées ensemble par le même nombre pour préserver la capacité de l'ensemble à refléter les rapports entre les entités. C'est cette dernière propriété qu'exprime le fait, pour les quantités, de

---

[23] Je prépare à l'heure actuelle une publication sur cette pratique générale de conduite d'une démonstration dans le commentaire.

[24] On consultera avec profit les premiers articles à avoir abordé de front ce concept : [Guo Shuchun郭書春, 1984, Li Jimin李繼閔, 1982a, Li Jimin李繼閔, 1982b]. Voir également l'entrée *lü* dans le glossaire publié dans [Chemla and Guo Shuchun, 2004, 956—959].

« communiquer », et c'est là que nous retrouvons notre second écho entre le commentaire de Liu Hui et le texte de la procédure de division tel qu'énoncé dans le Classique. La suite montrera qu'au nombre de ces *lü*, on peut compter un dividende et un diviseur dont l'association dans une division affirme qu'ils sont des quantités exprimant le rapport entre les entités auxquelles ils sont respectivement attachés. Le commentateur formule auparavant les conséquences du fait, pour les quantités, de « communiquer » :

« S'il y a des parts, on peut désagréger ; si les parts sont des superpositions réitérées, on simplifie[25]. 有分則可散，分重疊則約也。 »

Qu'est-ce à dire ? De par nature, si des *lü* —par exemple, un dividende et un diviseur— comportent des fractions, en les multipliant tous par les dénominateurs, on peut désagréger chaque unité en de multiples parts, de sorte qu'il ne reste que des nombres entiers de telles parts. Les valeurs obtenues restent des *lü* exprimant les rapports entre les entités associées. Cette première partie de l'énoncé peut s'interpréter comme renvoyant à la question, laissée en attente, de ramener la division de $(a + \frac{b}{c})$ par $(d + \frac{e}{f})$ à la division de $acf + bf$ par $dcf + ed$. Mais Liu Hui poursuit, et dans le membre suivant de l'énoncé, la seconde occurrence du terme « les parts » semble alors renvoyer aux « nombres de ces parts », soit aux « numérateurs », aux entiers formés. Le commentateur se penche alors sur la propriété inverse de la précédente : si des *lü* comportent un facteur commun, diviser l'ensemble par ce dernier n'affecte pas les quantités dans leur statut de *lü*. Il considère immédiatement l'application de cette autre propriété au cas en discussion :

« Diviseur et dividende, divisés par le nombre égal, sont des *lü* mis en relation l'un avec l'autre[26]. 等除法實，相與率也。»

Le « nombre égal » est le terme consacré pour le « plus grand commun diviseur ». Après s'être attaché à examiner la correction de la procédure, l'examen de Liu Hui l'amène à en proposer une amélioration : il est loisible de simplifier autant que faire se peut dividende et diviseur avant d'exécuter la division. Cette remarque lui fournit l'occasion d'introduire un nouveau concept, « *lü* mis en relation l'un avec l'autre », qui signale un intérêt, dès lors que l'on dispose de *lü*, d'en chercher les valeurs les mieux adaptées à la situation. La chute du commentaire semble conclure, en reliant, d'un point de vue procédural, l'ensemble de ce développement général à la question laissée en attente et à laquelle il répondait :

« Par conséquent, si on désagrège les parts, c'est qu'on fait nécessairement en sorte que les deux dénominateurs multiplient l'un et l'autre diviseur et dividende 故散分者，必令兩分母相乘法實也。»

Au total, nous voyons comment la démonstration que déploie Liu Hui fait concrètement écho aux termes par lesquels les opérations, ou plutôt les groupes d'opérations, sont prescrits indirectement. Le commentateur paraît ainsi souscrire à l'idée que le ou les auteurs de la procédure des *Neuf Chapitres* ont ici choisi d'indiquer les calculs à exécuter par les raisons qu'il y

---

25 Pour les termes de *fen* « part », *chongdie* « superpositions réitérées », je renvoie au glossaire, *ibid*.

26 Je renvoie encore au glossaire pour les termes *dengshu* « nombre égal » et *xiangyu lü* « *lü* mis en relation l'un avec l'autre ». Soulignons qu'à la différence de *lü,* ces deux autres concepts figurent dans les commentaires, mais ne se rencontrent pas dans le classique.

avait de les exécuter, intégrant de ce fait, à l'énoncé de l'algorithme des indications sur sa démonstration[27].

Au terme de cette seconde partie, nous pouvons donc conclure que la propriété d'un texte d'algorithme de renvoyer, par sa formulation même, aux raisons de sa correction paraît avoir intéressé les praticiens. Nous en avons relevé deux modalités. Pour un certain nombre de textes, c'est la structure de l'énoncé qui est parlante, dans la mesure où elle permet d'interpréter au fil du texte le sens des opérations, jusqu'à la formulation de la signification du résultat final. Notons que les commentateurs semblent avoir réservé le terme de *yi* 意 « intention, sens » pour désigner le sens en question. De fait, il semble que, dans le corpus chinois que j'ai analysé, seuls les énoncés de procédure relevant du premier genre de texte décrits dans la première partie puissent jouir de cette transparence. Pour d'autres textes, ce sont les termes retenus pour prescrire les opérations qui « signifient », en énonçant les raisons pour lesquelles il convient de les mobiliser. Dans le corpus chinois, sous réserve d'inventaire systématique tous les textes du second genre décrit dans la première partie de cet article paraissent mobiliser des termes de ce type. Il reste à approfondir cette question, mais nous savons dès à présent qu'il n'en a pas été de même partout.

Il est en effet particulièrement intéressant de constater, au terme de cette analyse, que les textes d'algorithmes mésopotamiens paraissent, à la lumière de l'analyse développée par Jens Høyrup, combiner les deux traits[28]. J'esquisserai les motifs qui m'amènent à cette conclusion, en rappelant l'exemple classique du premier problème de la tablette BM 13901. Une interprétation classique, comme celle que proposait Thureau-Dangin en 1936, traduisait les termes qui renvoyaient aux opérations par leurs noms usuels en français, comme suit[29] :

« J'ai **additionné** la surface et (le côté de) mon carré : 45'.
Tu poseras 1°, l'*unité*. Tu **fractionneras** en deux 1° : 30'. Tu **multiplieras** (entre eux) [30'] et 30' : 15'. Tu **ajouteras** 15' à 45' : 1°. 1° **est le carré de** 1°. 30', que tu as multiplié (avec lui-même), de 1° tu **soustrairas** : 30' est le (côté du) carré. »

Jens Høyrup met en cause cette interprétation, en suggérant que ces termes renvoient aux calculs à exécuter de façon indirecte —c'est ma lecture de son analyse. Ils les désignent en effet en énonçant l'opération géométrique qui leur correspond et qui rend compte de la correction de l'algorithme. Jens Høyrup propose dès lors une nouvelle traduction, dont je ne détaillerai pas ici la signification, et il l'assortit de la reconstitution de la suite d'opérations géométriques qu'indiquent selon lui les termes successifs que j'ai mis en gras.

"1. The surface **and** my confrontation: 45' is it. 1, the **projection**,
2. you posit. The **moiety** of 1 you **break**, 30' and 30' you **make hold** each other.
3. 15' to 45' you **append**: by 1, 1 is the equalside. 30' which you have made hold
4. in the inside of 1 you **tear out**: 30' the confrontation"

---

[27] [Chemla, 2010b] suggère que, si l'écrit connu datant au plus tard du second siècle avant notre ère, le *Livre de procédures mathématiques*, comporte des textes d'algorithmes comparables, la manière dont les raisons y sont indiquées par les termes désignant indirectement les opérations présente une différence essentielle. Il se profile ici peut-être les éléments d'une histoire sur lesquels nous pourrons revenir au fur et à mesure que les manuscrits découverts seront publiés.
[28] Je m'appuie ici sur [Høyrup, 2002, 11—13].
[29] Je ne fournirai ici aucune explication, ni sur le système de numération, ni sur le sens mathématique de ce texte, me contentant de commenter la manière dont il fait sens. C'est moi qui mets les termes en question en gras dans la citation.

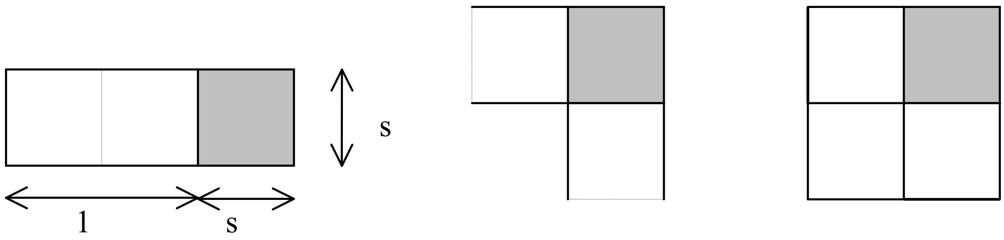

Figure 2: La reconstitution de la suite de figures sous-tendant la correction de l'algorithme (Jens Høyrup)

Il est clair que les termes jouent dans le texte un double rôle. Puisqu'ils sont suivis, dans l'énoncé de l'algorithme, d'un nombre, c'est bien qu'ils renvoient d'une manière ou d'une autre à une opération arithmétique. Cependant, l'interprétation de Jens Høyrup montre qu'il désigne le calcul indirectement, en énonçant une opération géométrique qui en indique la signification. On notera que la manière de « constituer » ces raisons diffère notablement de ce que nous avons vu pour *Les Neuf Chapitres*.

Cependant, ce n'est pas tout. Ces opérations géométriques s'enchaînent les unes aux autres pour former un raisonnement. Leur mise en évidence révèle le caractère « transparent » du texte, pour reprendre le terme que j'ai introduit plus haut. Ce n'est qu'en raison du fait qu'il possède cette propriété qu'il est loisible d'interpréter le texte au fil de l'énoncé. On comprend donc en quel sens les formulations d'algorithmes trouvés sur des tablettes mésopotamiennes combinent les deux propriétés de l'énoncé des algorithmes que j'ai décrites dans cette seconde partie. La récurrence de ces propriétés, par delà les différences dans la manière de les réaliser, soulève des questions qui dépassent le cadre de cet article. Elle montre en tout cas à quel point il serait artificiel d'opposer algorithme et démonstration, voire de les envisager *a priori* comme des entités distinctes l'une de l'autre.

Opérer sur le texte d'un algorithme dans le cadre d'une démonstration

Si cette propriété des énoncés a à ce point intéressé des praticiens qui ont opéré dans des contextes différents, pourquoi tous les textes de procédures ne la partagent-ils pas? La question mérite d'être posée, et elle nous mettra sur la piste des divers types de contraintes et d'opérations qui ont présidé à la mise en texte d'algorithmes. Je ne traiterai ici qu'une part infime de ce problème, en m'intéressant à une opération fondamentale, portant sur l'énoncé d'une procédure, que l'on trouve mise en œuvre fréquemment dans les démonstrations des commentaires aux *Neuf Chapitres* et qui rend compte des motifs pour lesquels cet énoncé peut perdre toute transparence.

Je me pencherai sur l'illustration la plus simple qu'il est possible de concevoir de cette opération, en illustrant mon propos par le commentaire attribué à Liu Hui et relatif à la procédure que nous appelons « règle de trois ». L'énoncé en est placé, dans *Les Neuf Chapitres*, en ouverture du chapitre 2 intitulé « Petit mil et grains décortiqués ». Plus précisément, cette section du classique débute par une table de grains —la ressource à l'aide de laquelle la bureaucratie prélevait les impôts et distribuait salaires aussi bien que rations. A chacun des vingt types de grain composant la table est associé un nombre entier[30] dénué d'unité. Ils partagent la propriété que le rapport entre des quantités équivalentes de n'importe quel couple de grain peut être exprimé par celui de ces entiers attachés à ces grains. Dès le début de l'énoncé de cette table, *Les Neuf Chapitres* introduisent le terme de *lü* pour qualifier ces valeurs. Il s'agit de la première occurrence

[30] Je passe sous silence quelques nuances.

significative de ce concept dans le classique. L'énoncé de la « règle de trois » fait immédiatement suite à la table et n'est donc précédé d'aucun problème. Ce point est corrélé à la propriété du texte de l'algorithme d'être particulièrement abstrait. Lisons-le avant de l'analyser :

« ON MULTIPLIE, PAR LA QUANTITE DE CE QUE L'ON A, LE *LÜ* DE CE QU'ON CHERCHE, CE QUI FAIT LE DIVIDENDE. ON PREND LE *LÜ* DE CE QU'ON A COMME DIVISEUR. ET ON EFFECTUE LA DIVISION DU DIVIDENDE PAR LE DIVISEUR 以所有數乘所求率爲實。以所有率爲法。實如法而一.。»

Les noms des opérandes mobilisés par la procédure explicitent abstraitement la signification des valeurs ainsi nommées relativement à une situation dans laquelle la « règle de trois » est mobilisée aussi bien que relativement les unes aux autres. Ils guident de surcroît la manière d'appliquer la procédure. Illustrons ces propos à l'aide du premier problème du chapitre qui suit l'énoncé de cette procédure et demande l'équivalent en grain décortiqué d'une quantité de petit mil. La table qui ouvre le chapitre donne 30 et 50, comme les nombres associés respectivement à ces deux types de grain. 30, la valeur attachée au grain décortiqué, sera le « *lü* de ce qu'on cherche » tandis que 50, lié au petit mil, joue le rôle du « *lü* de ce que l'on a », puisqu'affecté à l'entité donnée par l'énoncé. On voit comment le nom des opérandes guide l'application de la procédure. Ce n'est pas tout. Le terme de *lü* ne désigne pas seulement un type de valeur. Il renvoie à des propriétés que possèdent ces nombres, en particulier leur capacité à être modifiés conjointement, à la manière dont l'explicite le commentaire de Liu Hui examiné dans la partie précédente. De ce fait, désigner des opérandes comme *lü*, c'est, d'une part, pour ce qui est des calculs, prescrire leur transformation conjointe en les valeurs les plus simples possibles, avant d'exécuter les opérations décrites par la procédure. C'est également, d'autre part, pointer vers les raisons pour lesquelles cette conversion est licite. En fin de compte, l'exécution de la multiplication et de la division que prescrit la procédure mêlera un nombre portant des unités —la quantité de ce que l'on a— à deux autres valeurs, elles, simplifiées à l'extrême et ne comportant aucune unité. L'ensemble de ces traits caractérise la règle de trois telle qu'on la trouve dans les textes de la Chine ancienne.

Tournons-nous à présent vers le commentaire de Liu Hui. Après un premier développement philosophique sur lequel je ne reviens pas ici[31], Liu Hui se tourne vers les opérations prescrites par le texte de la procédure. Pour en formuler le sens, il se place dans le cadre du premier problème, qui fait suite à l'énoncé de l'algorithme. Il ne faut pas se méprendre sur la signification de ce geste, et c'est là qu'une recherche sur l'usage des problèmes en Chine ancienne est essentielle pour interpréter de tels développements [Chemla, 2009b]. On peut montrer, en observant la lecture que font les commentateurs des *Neuf Chapitres*, que les problèmes ne sont pas à leurs yeux simplement des questions à résoudre, mais qu'ils décrivent une situation offrant des ressources fondamentales pour formuler le sens des opérations des algorithmes. C'est ici que les dispositifs élaborés en Chine ancienne pour cette dernière opération contrastent avec ceux que d'autres traditions attestent[32]. Dans cet usage, fait capital à comprendre, les problèmes gardent leur valeur de paradigme : on peut établir que leur énoncé particulier est lu par les commentateurs comme général. Ces quelques faits permettront de mieux comprendre le commentaire de Liu Hui à la « règle de trois ». En voici la première partie :

---

[31] Je renvoie le lecteur à [Chemla and Guo Shuchun, 2004, 222—225], aux notes et à l'introduction du chapitre.

[32] Notons que certains textes de Suse analysés par Jens Høyrup présentent des dispositifs comparables.

« En s'appuyant sur le fait que le *lü* du petit mil[33] est 5 et que le *lü* du grain grossièrement décortiqué est 3, alors de 5 de petit mil, on fait 1, et de 3 de grain grossièrement décortiqué, on fait 1. En effet, si l'on veut transformer du petit mil pour en faire du grain décortiqué, le petit mil doit d'abord prendre pour base cette unité. Qu'il prenne cette unité, c'est ce que signifie le fait qu'on le simplifie par 5 : on fait que 5 devienne 1. Lorsque c'est terminé, alors en multipliant ceci par 3, on fait que 1 devienne 3. S'il en est ainsi, alors, quand les *lü* atteignent à l'unité[34], on prend 5 pour 3.

據粟率五、糲率三，是粟五而爲一，糲米三而爲一也。欲化粟爲米者，粟當先本是一。一者，謂以五約之，令五而爲一也。訖，乃以三乘之，令一而爲三。如是，則率至於一，以五爲三矣。»

Au terme d'un raisonnement que je n'analyserai pas ici, car il m'entraînerait loin de mon propos, le commentateur établit dans un premier temps le sens de la succession d'une division et d'une multiplication, en s'appuyant sur l'exemple du premier problème. En d'autres termes, comme c'était le cas avec le commentaire relatif au cercle examiné plus haut, il formule un algorithme résolvant le problème tout en établissant pas à pas le sens de ses opérations. La démonstration incorpore donc ici, dans un premier temps, la fabrication d'une procédure. Par nature, cet algorithme est transparent. Cependant, il diffère, dans l'ordre des opérations à effectuer, de celui proposé par le classique. C'est vers cette question que se tourne ensuite le commentateur, en vue de justifier la forme que prend la procédure dans *Les Neuf Chapitres* et, partant, sa correction. Lisons la suite du texte :

« Mais si on divise d'abord, puis que l'on multiplie, on aura peut-être des parts de reste. C'est pourquoi la procédure inverse les opérations. 然先除後乘，或有餘分，故術反之。 »

Ainsi, la justification que Liu Hui avance pour expliquer l'inversion des opérations de multiplication et de division, c'est-à-dire la différence entre la procédure transparente et celle fournie, renvoie au concret des calculs à exécuter. Une division placée en tête de procédure peut créer des fractions —notons ce « peut » qui signale la généralité de l'algorithme aux yeux du commentateur. La multiplication pourrait par suite affronter des quantités plus complexes qu'il n'est nécessaire. La remarque est d'autant plus juste qu'à la manière dont la « règle de trois » est pratiquée, la multiplication ou la division par un *lü* garantisse qu'un des opérandes sera entier.

Une opération est par suite appliquée sur le texte de la procédure établie par le commentaire : « on inverse » les deux opérations de multiplication et de division. Cette inversion permet de transformer l'algorithme démontré en la procédure à établir. C'est elle qui fait perdre sa transparence au texte que fournissent *Les Neuf Chapitres*. De telles inversions se présentent régulièrement dans les commentaires. Elles font partie d'une famille d'opérations analogues dont les commentateurs font souvent usage. Une fois un algorithme établi par un raisonnement donné, ils le transforment en la procédure telle qu'énoncée par le classique, en opérant à même la liste d'opérations. La validité de cet ensemble d'opérations pratiquées sur des listes d'opérations —je les appellerai des « méta-opérations »— est garantie par un même fait que Liu Hui souligne avec emphase dans son commentaire sur l'extraction de racine : le résultat des divisions et des

[33] Le terme de « en s'appuyant sur » signale régulièrement la mobilisation, au sein d'un commentaire, d'un problème pour les besoins de l'interprétation des opérations. On notera la simplification dont les valeurs de deux *lü* ont fait l'objet. Il convient de la distinguer de la simplification-division prescrite plus loin.

[34] Le philologue qui a travaillé, à la fin du XVIIIe siècle, à l'édition critique des *Neuf Chapitres* pour inclusion dans la *Bibliothèque complète des quatre magasins*, Dai Zhen, suivi en cela par de nombreux exégètes, pensait le texte ici corrompu : *zhi* "atteindre" lui paraissait provenir d'une erreur de copie du caractère *deng* "être égal à".

extractions de racines est donné de manière exacte. Ce sont les commentateurs eux-mêmes, on peut le montrer, qui établissent ce lien.

Le caractère essentiel de ces méta-opérations, c'est que l'emploi n'affecte pas le sens du résultat final, altérant, seule, la forme de l'algorithme. Par conséquent, si nous reprenons le raisonnement, le commentateur a produit une procédure tout en montrant qu'elle résolvait un problème donné. Il la transforme, par ces méta-opérations, en celle qu'il vise à démontrer, sans modifier le sens du résultat. Il montre ainsi que l'algorithme fourni par *Les Neuf Chapitres* donne bien le résultat attendu, et sa correction est de ce fait établie.

Ces méta-opérations représentent l'une des pratiques fondamentales qui font perdre leur transparence aux algorithmes, sans qu'elles épuisent le sujet. Elles constituent, par ailleurs, un développement important dans l'histoire de la démonstration puisqu'on peut y reconnaître les linéaments d'une forme de démonstration algébrique dans un contexte algorithmique[35].

Pour conclure, au terme de cette analyse, je pense que nous comprenons mieux comment le texte d'une procédure peut renvoyer aux raisons de sa correction et l'une des raisons pour lesquelles il n'en va pas toujours ainsi. Lorsqu'un tel texte n'est plus transparent, la démonstration restitue régulièrement l'algorithme transparent qui lui correspond et traite des méta-opérations qui permettent de passer de l'un à l'autre sans modifier le sens des résultats finaux obtenus. Ces quelques conclusions éclairent certains aspects d'un sujet bien plus vaste : celui des relations entre algorithme et démonstration.

Bibliographie

Bai Shangshu 白尚恕, 1982. *Jiuzhang suanshu zhushi* (Annotations of *The Nine Chapters on Mathematical Procedures)* "九章算術"注釋.

Chemla, K., 1990. De l'algorithme comme liste d'opérations. In: Jullien, F. (Ed.), L'art de la liste. Extrême Orient, Extrême Occident. 12. Presses Universitaires de Vincennes, Saint-Denis, pp. 79-94.

Chemla, K., 1991. Theoretical Aspects of the Chinese Algorithmic Tradition (First to Third Century). Historia Scientiarum. 42, 75-98+errata in the following issue.

Chemla, K., 1992. Les fractions comme modèle formel en Chine ancienne. In: Benoit, P., Chemla, K., and Ritter, J. (Eds.), Histoire de fractions, fractions d'histoire. Birkhäuser, Basel, pp. 189—207, 405, 410.

Chemla, K., 2005. The interplay between proof and algorithm in 3rd century China: the operation as prescription of computation and the operation as argument. In: Mancosu, P., Jorgensen, K.F., and Pedersen, S.A. (Eds.), Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics. Springer, Dordrecht, pp. 123—145.

Chemla, K., 2009a. Literacy and the history of science. Reflections based on Chinese and other sources. In: Olson, D.R., and Torrance, N. (Eds.), Cambridge handbook of literacy. Cambridge University Press, Cambridge (UK), pp. 253—270.

Chemla, K., 2009b. On mathematical problems as historically determined artifacts. Reflections inspired by sources from ancient China. Historia Mathematica. 36, 213—246.

Chemla, K., 2010a. A Chinese Canon in Mathematics and its two Layers of Commentaries: Reading a collection of texts as shaped by actors. In: Bretelle-Establet, F. (Ed.), Looking at

[35] [Chemla, 2010b, 263—267] donne un exemple de pareille opération impliquant une extraction de racine. Cet article illustre également une autre opération appliquée à une liste d'opérations : l'élimination d'opérations exactement opposées. Le chapitre A [Chemla and Guo Shuchun, 2004, 36—39] esquisse ces autres opérations et renvoie à la bibliographie sur le sujet. J'ai traité ailleurs de la manière dont je concevais la discussion de la validité de ces opérations dans le commentaire.

it from Asia: the processes that shaped the sources of history of science. Springer, Dordrecht, pp. 169—210.

Chemla, K., 2010b. Proof in the Wording: Two modalities from Ancient Chinese Algorithms. In: Hanna, G., Jahnke, H.N., and Pulte, H. (Eds.), Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives. Springer, Dordrecht, pp. 253—285.

Chemla, K., à paraître. Describing texts for algorithms: how they prescribe operations and integrate cases. Reflections based on ancient Chinese mathematical sources. In: Chemla, K., and Virbel, J. (Eds.), Introduction to textology via scientific writings.

Chemla, K., and Guo Shuchun, 2004. *Les neuf chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Dunod, Paris.

Guo Shuchun郭書春, 1984. 《九章算術》和劉徽注中之率概念及其應用試析 (Analyse du concept de *lü* dans Les Neuf Chapitres et dans le commentaire de Liu Hui). Kexueshi Jikan (Collection d'articles sur l'histoire des sciences) 科學史集刊. 11, 21—36.

Guo Shuchun郭書春, 1992. Gudai shijie shuxue taidou Liu Hui 古代世界數學泰斗劉徽 (Liu Hui, a leading figure of ancient world mathematics). Shandong kexue jishu chubanshe, Jinan.

Høyrup, J., 1990. Algebra and naive geometry: An investigation of some basic aspects of Old Babylonian mathematical thought. Altorientalische Forschungen. 17, 27-69, 262-324.

Høyrup, J., 2002. Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and its Kin. In: Studies and Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences, vol. Springer, Berlin & Londres.

Lam Lay Yong, 1994. Jiu Zhang Suanshu 九章算術 (Nine Chapters on the Mathematical Art): An Overview. Archive for history of exact sciences. 47, 1–51.

Li Jimin李繼閔, 1982a. 'Jiuzhang suanshu' zhong de bilü lilun '九章算術'中的比率理論 (La théorie des rapports dans Les Neuf Chapitres sur les procédures mathématiques). In: WU Wenjun (Ed.), 'Jiuzhang suanshu' yu Liu Hui 九章算術与劉徽 [*Les Neuf Chapitres sur les procédures mathématiques* et Liu Hui]. Beijing Shifan Daxue Chubanshe, Beijing, pp. 190—209.

Li Jimin李繼閔, 1982b. 中國古代的分數理論 (La théorie des fractions en Chine ancienne). In: WU Wenjun (Ed.), 'Jiuzhang suanshu' yu Liu Hui 九章算術与劉徽 [*Les Neuf Chapitres sur les procédures mathématiques* et Liu Hui]. Beijing Shifan Daxue Chubanshe, Beijing, pp. 190—209.

Li Jimin李繼閔, 1990. 東方數學典籍——《九章算術》及其劉徽注研究 (Recherches sur le Classique mathématique oriental *Les Neuf Chapitres sur les procédures mathématiques* et le commentaire de Liu Hui à son sujet). Shaanxi renmin jiaoyu chubanshe, Xi'an.

PENG Hao彭浩, 2001. Zhangjiashan hanjian «Suanshushu» zhushi (Commentaires sur le *Livre de procédures mathématiques*, ouvrage sur lattes de bambou datant des Han découvert à Zhangjiashan). Editions des sciences (Kexue chubanshe), Pékin.

Rashed, R., 2007. Al-Khwarizmi. Le commencement de l'algèbre. Texte établi, traduit et commenté par R. Rashed. In: Sciences dans l'histoire, vol. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris.

Shen Kangshen, Crossley, John N., and Lun, Anthony W.-C., 1999. The nine chapters on the mathematical art. Companion and commentary. Oxford University Press & Science Press, Oxford & Beijing.

Volkov, A., 1994. Calculation of π in ancient China: From Liu Hui to Zu Chongzhi. Historia Scientiarum: International Journal of the History of Science Society of Japan. 4, 139-157.

Volkov, A., 2010. Commentaries upon commentaries: The translation of the Jiu zhang suan shu 九章算術 by Karine Chemla and Guo Shuchun. Historia Mathematica. 37, 281–301.